Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2012

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za IV razred srednje škole

1. Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 3$ postoje neparni prirodni brojevi x i y takvi da važi

$$2^n = 7x^2 + y^2 \tag{1}$$

Rješenje:

Dokaz sprovodimo matematičkom indukcijom po n.

$n = 3$. U ovom slučaju, odmah vidimo da je jednakost ispunjena za $x = y = 1$.

Induktivna pretpostavka. Pretpostavimo da jednakost (1) važi za $n = k$.

$n = k + 1$. Na osnovu *Induktivne pretpostavke*, treba pokazati da (1) važi za $n = k + 1$. Za $n = k$ po pretpostavci postoje neparni prirodni brojevi x i y takvi da je

$$2^k = 7x^2 + y^2,$$

pa množeći ovu jednakost sa 2, dobijamo

$$2^{k+1} = 14x^2 + 2y^2.$$

Primijetimo da važi

$$14x^2 + 2y^2 = 7\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x-y}{2}\right)^2$$

i

$$14x^2 + 2y^2 = 7\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x+y}{2}\right)^2.$$

Kako su x i y neparni, bar jedan od brojeva $\frac{x+y}{2}$ ili $\frac{x-y}{2}$ mora biti neparan.

Ako je $\frac{x+y}{2}$ neparan, tada je $\frac{7x-y}{2} = 4x - \frac{x+y}{2}$ očigledno neparan broj. Slično, ako je $\frac{x-y}{2}$ neparan, tada je $\frac{7x+y}{2} = 4x - \frac{x-y}{2}$ takođe neparan broj.

$\square$

2. Nenegativni realni brojevi a, b, x i y zadovoljavaju nejednakosti $a^5 + b^5 \leqslant 1$ i $x^5 + y^5 \leqslant 1$. Dokazati da važi

$$a^2x^3 + b^2y^3 \leqslant 1.$$

Rješenje: Primjenjujući nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine na a^5, a^5, x^5, x^5, x^5 dobijamo

$$a^2x^3 = \sqrt[5]{a^5a^5x^5x^5x^5} \leqslant \frac{a^5 + a^5 + x^5 + x^5 + x^5}{5} = \frac{2a^5}{5} + \frac{3x^5}{5}.$$

Analogno se dobija da je

$$b^2y^3 \leqslant \frac{2b^5}{5} + \frac{3y^5}{5},$$

pa je

$$a^2x^3 + b^2y^3 \leqslant \frac{2a^5}{5} + \frac{3x^5}{5} + \frac{2b^5}{5} + \frac{3y^5}{5} \leqslant \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$$

□

3. a) Odrediti najveći prirodan broj $p \in \mathbf{N}$ za koji postoji realan broj q tako da važi

$$p^2 + q^2 = 2012.$$

b) Ako je $a^3 - 3ab^2 = p$ i $b^3 - 3a^2b = q$, izraziti $a^2 + b^2$ preko p i q.

Rješenje: a) Lako se vidi da je $p = 44$ i $q = \sqrt{76}$.

b) Primijetimo da važi

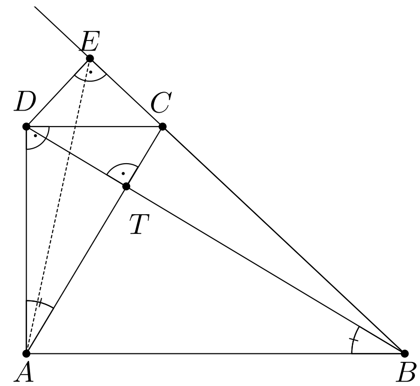
$$p^2 + q^2 = (a^2 + b^2)^3 \quad \Longrightarrow \quad a^2 + b^2 = \sqrt[3]{p^2 + q^2}.$$

□

4. U trapezu $ABCD$ sa osnovicama AB i CD ($AB > CD$), ugao $\angle ADC$ je prav, a dijagonale AC i BD su ortogonalne. Neka je E podnožje normale iz tačke D na pravu određenu tačkama B i C. Dokazati da je

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC \cdot CD}{AC^2 - CD^2}.$$

Rješenje:



Slika 1.

Važi:

$$AC^2 - CD^2 = AD^2 \implies \frac{AC \cdot CD}{AC^2 - CD^2} = \frac{AC \cdot CD}{AD^2} \tag{2}$$

Ako je T tačka presjeka dijagonala AC i BD, onda je

$$\angle TAD = \angle ABD,$$

pa je $\triangle ACD \sim \triangle BDA$, a odavde je

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AD} \implies AD^2 = AB \cdot CD.$$

Odavde slijedi da (2) možemo zapisati u obliku

$$\frac{AC \cdot CD}{AD^2} = \frac{AC \cdot CD}{AB \cdot CD} = \frac{AC}{AB}. \tag{3}$$

Kako je

$$\angle BAD = \angle DEB = \frac{\pi}{2}$$

zaključujemo da je četvorougao $ABED$ tetivni što znači

$$\begin{aligned} &\angle AEB = \angle ADB \\ &\angle ADB = \frac{\pi}{2} - \angle BDC = \frac{\pi}{2} - \angle ABD = \frac{\pi}{2} - \angle DAC = \angle CAB, \end{aligned}$$

što daje $\angle AEB = \angle CAB$. Dakle, $\triangle AEB \sim \triangle ACB$, odakle konačno slijedi

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{AB},$$

odnosno

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC \cdot CD}{AC^2 - CD^2}. \qquad \square$$